

EXERCICE 2**6 points****Commun à tous les candidats**

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

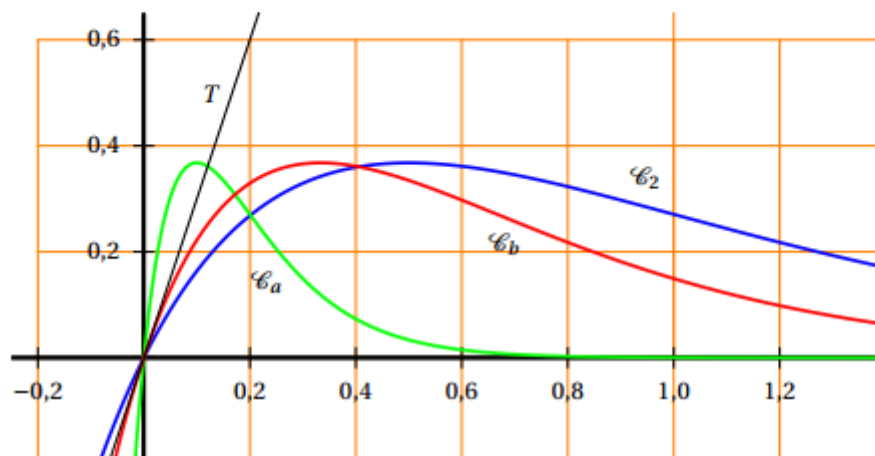
$$g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$$

est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f'_k(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

- b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
- c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
- d. Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.
- e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b .