

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Partie B

On définit la fonction g_m sur \mathbb{R} par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1.
 - a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
 - b. Dédurre de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. On a représenté en annexe 2 les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e , et \mathcal{C}_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. ...tudier la position de la courbe \mathcal{C}_m par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
4.
 - a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
 - b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

