

1. Exercice 1 (6 points)

Partie A

1. Restitution organisée de connaissance

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée ;

- $e^0 = 1$;

- pour tout réel x , on a $e^x > x$.

- soient deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A; +\infty[$, où A est un réel positif. Si pour tout x de $[A; +\infty[$, $v(x) \leq w(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 1$.

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations sur $[0; +\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang.

On admet que $f(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t > 0$).

.

On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n .
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$ incrémenter la variable n de 1. Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n .

où f est la fonction étudiée dans la partie A.

- À l'aide de la question 2. a. de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.
- Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?
- L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permettrait-il de répondre ?