1. Exercice 3

6 points

On considère la fonction *f* définie sur R par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=1$.

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel *x* non nul, $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. En déduire la limite de *f* en $+\infty$

.

2. Donner, sans démonstration, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-1}$ et démontrer que *f* est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel *x*, on a : $e^x \geq x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour *x* = 0.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction *f* et déterminer la fonction *g* telle que, pour tout nombre réel *x* non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de *f*.

4. Soient *x* un nombre réel non nul et les points *M*(*x* ; *f*(*x*)) et *M'*(−*x* ; *f*(−*x*)) de la courbe C.

a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (*MM'*).

b. On admet que la fonction *f* est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?