

PROBLEME (10 points) commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C). (0,5 point)

2. Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$). (0,5 point)

Que peut-on en déduire pour la fonction f ? (0,25 point)

Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? (0,25 point)

3. Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}. \quad (0,5 \text{ point})$$

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f .

(1 point)

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

Feuille 28

1. Montrer que, dans $]0 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes. (0,5 point)

2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près. (0,75 point)

3. On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$.

Encadrer A à $(2 \times 10)^{-1}$ près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$. (0,75 point)

4. Pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a .

Montrer que (T_α) a pour équation $y = Ax$. Tracer (T_α) , puis la courbe (C) . (1 point)

5. Dédurre des questions précédentes que de toutes les tangentes (T_a) à (C) (en des points d'abscisses non nulles), seule (T_α) passe par l'origine O . (0,5 point)

6. On admettra (T_α) est au-dessus de (C) sur $]0 ; +\infty[$.

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné. (0,5 point)

b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné. (0,5 point)