Exercice 8

1) Démontrer que le produit de p nombres consécutifs est toujours multiple de p.
2) Démontrer que le produit de p nombres consécutifs est toujours un multiple de p !
   ($p ! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1$)
3) En déduire que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ est toujours entier.

Exercice 9

Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

Exercice 10

Soit a et q deux entiers naturels non nuls. Dans la division euclidienne de a par 123 on obtient q pour quotient et
$3q^3 + 5$ pour reste. Déterminer les valeurs possibles de a et q.

Exercice 11

1) Démontrer que tout entier n est de la forme 4k, 4k + 1, 4k + 2 ou 4k + 3 où $k \in \mathbb{Z}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = 3n^2 + 5$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par 4 selon n.
3) Donner le reste de la division euclidienne de A_{142834} par 4.
4) Démontrer que si A_n est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

Exercice 12

Soit a un entier relatif. Dans la division euclidienne de a par , le quotient est le double du reste. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

Exercice 13

1) Arthur monte un escalier trois marches par trois. A la fin il lui reste deux marches à monter. Il sait par ailleurs que l'escalier compte entre 80 et 90 marches. Combien de pas peut-il avoir fait, et combien de marches peut compter l'escalier ?
2) Claire a, quant à elle, monté l'escalier quatre marches par quatre marches et il lui en restait trois à monter à la fin. Donner le nombre de marches de l'escalier et le nombre de pas faits par Claire.

Exercice 14

Déterminer a, b et c entiers tels que : $\dfrac{59}{3^2} = a + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{3^2}$ avec $0 < b < 3$ et $0 < c < 3$.

Exercice 15

1) Montrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
3) En déduire que quelque soit n, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.