

Exercice 1

Voici cinq propositions :

- (P_0) : « Si n est un entier naturel pair, alors $n+1$ est premier ».
 (P_1) : « Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 7, si n est pair, alors $n+1$ est premier ».
 (P_2) : « Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 20, si n est pair, alors $n+1$ est premier ».
 (P_3) : « Il existe au moins un entier naturel n tel que si n est pair, alors $n+1$ est premier ».
 (P_4) : « Il existe au moins un entier naturel n dans l'ensemble $\{8; 14; 20; 26; 32\}$ tel que si n est pair, alors $n+1$ est premier ».

1. Analyser les différences entre ces propositions.
2. Préciser pour chacune d'elle si elle est vraie, fausse, ni vraie ni fausse.
3. Justifier les propositions que vous avez jugées vraies et celles que vous avez jugées fausses.
4. Enoncer les réciproques des propositions (P_1) et (P_3) et justifier pour chacune d'elle si elle est vraie ou fausse.
5. Enoncer les négations des propositions (P_2) et (P_4) et justifier pour chacune d'elle si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2

On considère P un polynôme à coefficients entiers relatifs. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

- 1) Montrer que toute racine entière de P , non nulle divise a_0
- 2) Le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ a-t-il des racines entières ?

Exercice 3

- 1) Ecrire $1^3, 2^3, 3^3$ comme des différences de deux carrés.
- 2) Soit a un entier naturel non nul, montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls m et p tels que $m + p = a^2$ et $m - p = a$. En déduire a^3 en fonction de m et p .
- 3) Montrer que le cube de tout entier naturel non nul peut s'écrire comme une différence de deux carrés.
- 4) Ecrire 7^3 comme une différence de deux carrés.

Exercice 4

- 1) Démontrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.
- 2) Que pensez vous de la réciproque ? Justifier.

Exercice 5

Comment choisir l'entier naturel n pour que $n + 8$ soit multiple de n ?

Exercice 6

- 1) a) Soit n un entier relatif différent de -2, déterminer a et b tels que $\frac{n+21}{n+2} = \frac{a}{n+2} + b$
 b) Déterminer tous les entiers n tels que $n+2 \mid n+21$
 - 2) Déterminer n tels que les nombres suivants soient des entiers :
- a) $\frac{2n+8}{n-2}$ b) $\frac{n+2}{n-4}$ c) $\frac{7n-1}{n+3}$ d) $\frac{-6n+3}{n+5}$

Exercice 7

- 1) Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $4x^2 = y^2 + 15$
- 2) Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant $6x + y - 3xy + 22 = 0$
- 3) Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant $(x - 27)(y + 12) = -xy$