

EXERCICE 2

p est premier et $p \geq 5$.

- 1) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3
- 2) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8
- 3) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24

EXERCICE 3

$p > 3$ est un nombre premier

- 1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
- 2) Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

EXERCICE 4

Démontrer que pour tout n entier ($n \geq 1$), $30n + 7$ n'est jamais la somme de deux nombres premiers.

EXERCICE 5

Les nombres de Mersenne

Pour $n \geq 1$, le $n^{\text{ième}}$ nombre de Mersenne est le nombre $M_n = 2^n - 1$.

- 1) Quels sont les nombres premiers parmi les nombres de Mersenne M_n pour $n \leq 6$.
- 2) Montrer la factorisation standard ($n \geq 1$) :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

- 3) Montrer que si n n'est pas premier alors le nombre de Mersenne M_n ne l'est pas non plus.
En déduire que si M_n est premier alors n est premier.
- 4) La réciproque est-elle vraie ?
- 5) Soit a et n deux entiers tels que $a \geq 2$ et $n \geq 2$.
Montrer que, si $a^n - 1$ est premier, alors nécessairement $a = 2$ et n est premier.