

**EXERCICE 2** 

---

$p$  est premier et  $p \geq 5$ .

- 1) Démontrer que  $p^2 - 1$  est divisible par 3
- 2) Démontrer que  $p^2 - 1$  est divisible par 8
- 3) En déduire que  $p^2 - 1$  est divisible par 24

**EXERCICE 3** 

---

$p > 3$  est un nombre premier

- 1) Quels sont les restes possibles dans la division de  $p$  par 12 ?
- 2) Prouver que  $p^2 + 11$  est divisible par 12.

**EXERCICE 4** 

---

Démontrer que pour tout  $n$  entier ( $n \geq 1$ ),  $30n + 7$  n'est jamais la somme de deux nombres premiers.

**EXERCICE 5** 

---

**Les nombres de Mersenne**

Pour  $n \geq 1$ , le  $n^{\text{ième}}$  nombre de Mersenne est le nombre  $M_n = 2^n - 1$ .

- 1) Quels sont les nombres premiers parmi les nombres de Mersenne  $M_n$  pour  $n \leq 6$ .
- 2) Montrer la factorisation standard ( $n \geq 1$ ) :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

- 3) Montrer que si  $n$  n'est pas premier alors le nombre de Mersenne  $M_n$  ne l'est pas non plus.  
En déduire que si  $M_n$  est premier alors  $n$  est premier.
- 4) La réciproque est-elle vraie ?
- 5) Soit  $a$  et  $n$  deux entiers tels que  $a \geq 2$  et  $n \geq 2$ .  
Montrer que, si  $a^n - 1$  est premier, alors nécessairement  $a = 2$  et  $n$  est premier.