

EXERCICE 50

- 1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre $\frac{3n+38}{n+5}$ est-il un entier ?
 2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n la fraction $\frac{3n+38}{n+5}$ est-elle irréductible ?

EXERCICE 51

n désigne un entier relatif. On pose $a = n^2 - 3n + 6$ et $b = n - 1$.

- 1) Vérifier que $n^2 - 3n + 6 = (n - 1)(n - 2) + 4$.
 2) Démontrer que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(n - 1; 4)$.
 3) a) Quelles sont les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a; b)$?
 b) L'entier n s'écrit : $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$ où k est un entier.
 Pour chacune de ces quatre formes, déterminer $\text{PGCD}(a; b)$.

EXERCICE 52

Soit n un entier relatif.

On pose : $d = \text{PGCD}(n + 5; 3n - 6)$.

- 1) a) Montrer que $d \mid 21$.
 b) En déduire les valeurs possibles de d .
 c) Montrer que : $d = \text{PGCD}(n + 5; 21)$.
 2) Démontrer que : $d = 21 \Leftrightarrow n \equiv 16 \pmod{21}$
 3) a) Démontrer que : $7 \mid d \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{7}$. (Procéder en deux implications.)
 b) Soit k un entier. Démontrer que si $n \equiv k \pmod{21}$, alors $n \equiv k \pmod{7}$.
 c) Démontrer que : $n \equiv 2 \pmod{7} \Leftrightarrow n \equiv 2 \text{ ou } 9 \text{ ou } 16 \pmod{21}$.
 (On pourra procéder en deux implications ou bien raisonner modulo 21.)
 d) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $d = 7$.
 4) En procédant comme dans la question 3, déterminer les valeurs de n pour lesquelles $d = 3$.
 5) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $d = 1$.

EXERCICE 53

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $u_n = 3^n + 5$ et $v_n = 3^n - 2$.

- a) Déterminer les valeurs possibles de $\text{PGCD}(u_n; v_n)$.
 b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles 7 divise v_n .
 c) En déduire, suivant les valeurs de n , la valeur de $\text{PGCD}(u_n; v_n)$.

EXERCICE 54

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Soit n un entier naturel. On pose $A = 2n^2 + 7n + 3$ et $B = 6n^2 + 7n + 2$.

- a) $\text{PGCD}(A; B)$ est un multiple de $2n + 1$.
 b) $\text{PGCD}(A; B) = 2n + 1$.
 c) $\text{PGCD}(A; B)$ est impair.
 d) $\text{PGCD}(A; B)$ peut être égal à 5.
 e) $\text{PGCD}(A; B)$ peut être égal à 9.

EXERCICE 55

- 1) Déterminer tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a; b) = 15$ et $a + b = 300$.
 2) Déterminer tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a; b) = 18$ et $ab = 6480$.