EXERCICE 66

Soit n un entier naturel. On pose : $d = PGCD(n^3 + n; 2n + 1)$.

1) Démontrer que n et d sont premiers entre eux.

2) Démontrer que $d = PGCD(n^2 + 1; 2n + 1)$.

3) Démontrer que $d = 1$ ou $d = 5$.

4) En raisonnant modulo 5, démontrer que : $d = 5 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod 5$.

5) En déduire les valeurs de n pour lesquelles la fraction $\frac{n^3 + n}{2n + 1}$ est irréductible.

EXERCICE 67

Dans chaque cas, déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation donnée.

a) $2563x - 753y = 3$.

b) $34x + 26y = 504$.

c) $8x + 14y = 3$.

EXERCICE 68

Déterminer tous les entiers naturels x tels que : $15x \equiv 13 \pmod{101}$.

EXERCICE 45

Démontrer que, pour tout entier naturel n, les nombres n et $n^2 + 1$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 46 : une équation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de déterminer des couples $(a; b)$ d'entiers vérifiant l'équation (1) : $a^2 - 2b^2 = 1$.

1) On suppose que $(a; b)$ est solution.

a) Prouver que a est impair.

b) En déduire que $a^2 - 1$ est multiple de 4 puis que b est pair.

c) Montrer que a et b sont premiers entre eux.

2) a) Donner une solution évidente de (1).

b) Montrer que si $(a; b)$ est solution de (1), alors le couple $(3a + 4b; 2a + 3b)$ l'est également.

c) Déterminer trois autres couples solutions de (1).

3) a) Ecrire un algorithme qui affiche un couple d'entiers supérieurs à 1000 vérifiant (1).

b) Programmer cet algorithme. Quel couple affiche-t-il ?

EXERCICE 48

1) Le PGCD des entiers a et b est égal à d. Démontrer que : $PGCD(15a - 4b; 11a - 3b) = d$.

2) Soit a un entier. Démontrer que les nombres $15a + 4$ et $11a + 3$ sont premiers entre eux.

3) Soit m, n, r, s quatre entiers relatifs vérifiant : $ms - nr = 1$. Démontrer que : $PGCD(ma + nb; ra + sb) = d$.