

EXERCICE 56

- 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 40 et 117 sont premiers entre eux.
- 2) Puis déterminer deux entiers u et v tels que : $40u + 117v = 1$.
- 3) En déduire deux entiers x et y tels que : $40x - 117y = 5$.

EXERCICE 57

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD.

Pour déterminer un couple (u, v) d'entiers tels que $ua + vb = d$, c'est-à-dire tels que $v = \frac{d-ua}{b}$, on peut donner à u successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, etc ... et calculer à chaque fois le quotient $\frac{d-ua}{b}$; et cela jusqu'à ce qu'on trouve un quotient entier.

Ecrire un algorithme qui réalise cet objectif.

EXERCICE 58

Soit a et b deux entiers naturels et $d = \text{PGCD}(a; b)$.

Nous avons vu qu'il existe un couple d'entiers $(u; v)$ tel que : $ua + vb = d$.

Démontrer que : $\text{PGCD}(u; v) = 1$.

EXERCICE 62

Soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls.

Démontrer que si a est premier avec b et si a est premier avec c , alors a est premier avec bc .

EXERCICE 63

Soit a et b deux entiers non nuls.

- 1) Montrer que si les entiers a et b^2 sont premiers entre eux, alors a et b sont premiers entre eux.
- 2) Etudier la réciproque.

EXERCICE 64

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux vérifiant : $a + a^2 = 3b^2$.

- 1) Démontrer que a divise 3.
- 2) En déduire tous les couples $(a; b)$ possibles.

EXERCICE 65

Soit a et b deux entiers relatifs. On considère le polynôme $P(x) = x^2 + ax + b$.

Démontrer que si $P(x)$ admet une racine α qui est un nombre rationnel, alors α est un entier.

EXERCICE 60

Soit a, b, c trois entiers relatifs. Soit n un entier naturel non nul.

- 1) Démontrer que si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- 2) Trouver un contre-exemple à la réciproque.
- 3) Démontrer que si $ac \equiv bc \pmod{n}$ et si c et n sont premiers entre eux, alors $a \equiv b \pmod{n}$.

EXERCICE 61

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse en justifiant.

- 1) Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
- 2) Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
- 3) Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
- 4) Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.