Triplets pythagoriciens

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\text{(E)} \quad x^2 + y^2 = p^2$$

1) On pose $p = 2$. Montrer qua l'équation (E) est sans solution.

2) On suppose désormais que $p \neq 2$ et que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E). Le but des questions suivantes est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

   a) Montrer que x et y sont de parités différentes.

   b) Montrer que x et y ne sont pas divisible par p.

   c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3) On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est à dire que :

$$p = u^2 + v^2 \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont deux entiers naturels strictement positifs.}$$

   a) Vérifier que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de (E).

   b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque que $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4) On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas la somme de deux carrés.

   a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils la somme de deux carrés ?

   b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solutions en entiers strictement positifs.