EXERCICE 73

1) Démontrer que pour tout entier n strictement supérieur à 2, $2n^2+7n-15$ est un nombre composé.
   Indication : factoriser $2n^2+7n-15$.
2) Soit n un entier naturel. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n^2-18n+77$ est un nombre premier.

EXERCICE 74

Soit p un nombre premier.
On considère l'équation (E) : $x^2-y^2=p$.

a) Démontrer que si $(x;y)$ est un couple d'entiers naturels solution de (E), alors x et y sont deux entiers consécutifs.
b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels solution de (E).

EXERCICE 75

Montrer que si les nombres p et $8p-1$ sont premiers, alors le nombre $8p+1$ est composé.
Indication : on pourra raisonner modulo 3.

EXERCICE 76

Montrer que si p est un nombre premier différent de 3, alors le nombre $8p^2+1$ est composé.
On pourra utiliser le reste de la division euclidienne de p par 3.

EXERCICE 77

Deux nombres premiers sont dits jumeaux si leur différence est égale à 2.
Par exemple, 3 et 5 sont deux nombres premiers jumeaux.

1) Démontrer que si p et $p+2$ sont deux nombres premiers jumeaux avec $p\neq 3$, alors le nombre $p+1$ est divisible par 6.
2) Démontrer qu'à l'exception du couple $(3;5)$, tous les couples de nombres premiers jumeaux sont de la forme $(6n-1;6n+1)$ avec n un entier naturel non nul.
3) Tous les couples de la forme $(6n-1;6n+1)$ avec n un entier naturel non nul sont-ils des couples de nombres premiers jumeaux ?

EXERCICE 78

Les nombres de Fermat sont les nombres $F_n=2^{2^n}+1$ où $n\in\mathbb{N}$.

1) Dans cette question, on utilisera un programme informatique.
   a) En 1640, Pierre de Fermat pensait que ces nombres étaient tous premiers.
      Vérifier que les entiers F_n sont premiers lorsque $0\leq n\leq 4$.
   b) En 1732, Leonhard Euler prouve que F_5 n'est pas premier. Donner un diviseur premier de F_5.
   c) En 1880, F. Landry obtient une écriture de F_6 comme produit de deux nombres premiers. Laquelle ?
2) Vérifier que tous les nombres de Fermat sont impairs.
3) Démontrer par récurrence que $F_0F_1...F_{n-1}=F_n-2$ pour tout entier naturel non nul n.
4) Déduire des questions précédentes que si d est un diviseur commun à deux nombres de Fermat, alors $d=1$.
5) Sachant que tout entier supérieur ou égal à deux admet au moins un facteur premier, déduire de ce qui précède une démonstration de l'infinité des nombres premiers.

EXERCICE 79

Déterminer les entiers n tels que : $n^3\equiv n$ [mod 11].