EXERCICE 1

On considère le système de congruence :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S) .
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15\cdot k$, où k désigne un entier relatif.

EXERCICE 2

Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :

$$y \cdot (y - x) = x \cdot (2 - x)$$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

1. Démontrer que le nombre x divise y .
2. On pose $y=k\cdot x$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
 - a. Montrer que x divise 2, puis que $x=2$.
 - b. En déduire les valeurs possibles de k .

EXERCICE 3

1. Dans chaque question, préciser si la proposition faite est vraie ou fausse :
 - a. Pour tout entier naturel n , on a :

$$2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$
 - b. Soit x un entier naturel.
Si $x^2 + x \equiv 0 \pmod{12}$ alors $x \equiv 0 \pmod{4}$
2. On rappelle le corollaire :

*Soit a, b, c trois entiers relatifs.
Si b et c premiers entre eux et si b divise a
et c divise a alors le produit $b\cdot c$ divise a*

Pour tout entier naturel n , on définit l'entier a par :

$$a = n \cdot (2n + 1)(7n + 1)$$
 - a. Justifier que l'entier a est pair.
 - b. Justifier que l'entier a est divisible par 6.