

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$A(n) = n^4 + 1$$

1. Etudier la parité de l'entier $A(11)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}$$

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel, on pose :

$$a = 2n + 8 \quad ; \quad b = 3n + 15$$

On note d le PGCD de a et de b .

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d divise 6.
2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels n pour lesquels $d=6$. C'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \text{pgcd}(2n+8; 3n+15) = 6 \right\}$$

- a. Montrer que si $n \in \mathcal{S}$ alors il existe un entier k tel que $n = -4 + 3 \cdot k$.
- b. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.