

**Exercice 1** (6 points)

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul,

1°) Rappeler les deux définitions du cours de : «  $a$  congru à  $b$  modulo  $n$  ».

2°) Démontrer la propriété du cours suivante :

Pour tout entier relatif  $c$ , si  $a \equiv b [n]$  alors  $ac \equiv bc [n]$ .

3°) Démontrer la propriété du cours suivante :

Pour tous entiers relatifs  $c$  et  $d$ , si  $a \equiv b [n]$  et  $c \equiv d [n]$  alors  $ac \equiv bd [n]$ .

**Exercice 2** (3 points)

Dans une division euclidienne, le dividende est augmenté de 36 et le diviseur de 3 ; le quotient et le reste se trouvent inchangés.

Déterminer le quotient.

**Exercice 3** (4 points)

Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 20 donne un reste égal au carré du quotient.

**Exercice 4** (7 points)

Pour tout entier naturel  $n$  on note :  $u_n = 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ .

1°) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par 5, en utilisant une démonstration par récurrence.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par 5, en utilisant des congruences.