Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2.
1. Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
2. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3.
1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
2. Exprimer y_n en fonction de n.
3. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
4. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.