

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1.** Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
- 2.** On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β .
 - 1.** Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .
 - 2.** Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.
- 3.** On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{aligned}a &= n^3 + 2n^2 - 3n \\ b &= 2n^2 - n - 1\end{aligned}$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

- 4.**
 - 1.** On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$.
 - 2.** En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n .
 - 3.** Application :
 - Déterminer Δ pour $n = 2001$;
 - Déterminer Δ pour $n = 2002$.