

- 1.** Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

- 2.** Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 de la suite u .

- 3.** 1. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

3. En déduire, pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1} .

- 4.** Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

1. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3. Déterminer, pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.