Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4+4=\left(x^2+2\right)^2-4x^2$.
2. En déduire que x^4+4 peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A=n^2-2n+2$ et $B=n^2+2n+2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que n^4+4 n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   1. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   2. Montrer que d divise n.
   3. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   1. Montrer que 4 ne divise pas n^2-2n+2.
   2. Montrer que d est de la forme $d=2p$, où p est impair.
   3. Montrer que p divise n. En déduire que $d=2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)