

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

- 1.** Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
- 2.** On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .
 - 1.** Établir une relation entre α et β indépendante de n .
 - 2.** Démontrer que d est un diviseur de 5.
 - 3.** Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
- 3.** Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
- 4.**
 - 1.** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a et b .
 - 2.** Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.