

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants :  $N = 9n + 1$  et  $M = 9n - 1$ .

- 1.** On suppose que  $n$  est un entier pair. On pose  $n = 2p$ , avec  $p$  entier naturel non nul.
  1. Montrer que  $M$  et  $N$  sont des entiers impairs.
  2. En remarquant que  $N = M + 2$ , déterminer le PGCD de  $M$  et  $N$ .
- 2.** On suppose que  $n$  est un entier impair. On pose  $n = 2p + 1$ , avec  $p$  entier naturel.
  1. Montrer que  $M$  et  $N$  sont des entiers pairs.
  2. En remarquant que  $N = M + 2$ , déterminer le PGCD de  $M$  et  $N$ .
- 3.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère l'entier  $81n^2 - 1$ .
  1. Exprimer l'entier  $81n^2 - 1$  en fonction des entiers  $M$  et  $N$ .
  2. Démontrer que si  $n$  est pair alors  $81n - 1$  est impair.
  3. Démontrer que  $81n^2 - 1$  est divisible par 4 si et seulement si  $n$  est impair.