Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

1. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
3. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
2. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.