**TS** **ESPACE** feuille 45

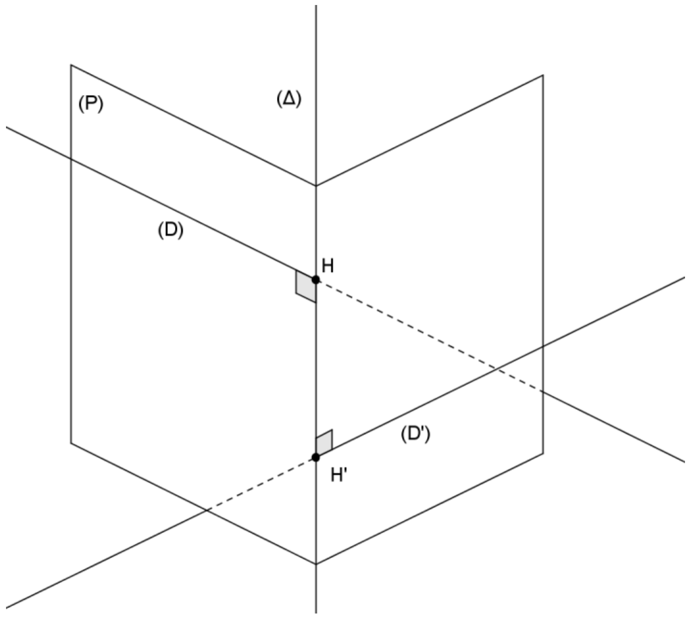
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite (D) passant par le point A de coordonnées (3 ; –4 ; 1) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;-3\,;1)$.

On considère la droite (D') dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-1-t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

On admet qu'il existe une unique droite ( $\Delta$ ) perpendiculaire aux droites (D) et (D'). On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite ( $\Delta$ ) et de calculer la distance entre les droites (D) et (D'), distance qui sera définie à la question 5.

On note H le point d'intersection des droites (D) et ( $\Delta$ ), H' le point d'intersection des droites (D') et ( $\Delta$ ). On appelle (P) le plan contenant la droite (D) et la droite ( $\Delta$ ). On admet que le plan (P) et la droite (D') sont sécants en H'. Une figure est donnée ci-dessous.




1. On considère le vecteur $\vec{w}(1\,;0\,;-1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est une vecteur directeur de la droite ( $\Delta$ ).

2. Soit $\vec{n}(3\,;2\,;3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P).

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est 3$x$ + 2$y$ + 3$z$ – 4 = 0.

3. a. Démontrer que le point H' a pour coordonnées (–1 ; 2 ; 1).

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ).

4. a. Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*.

L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à (D) et tout point M' appartenant à (D'), $\mathrm{MM'} \geq \mathrm{HH'}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$.

b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{\mathrm{HH'}}\right\|^2$ et conclure.

*La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de (D) et une point de (D'). On l'appelle* distance *entre les droites (D) et (D')*.