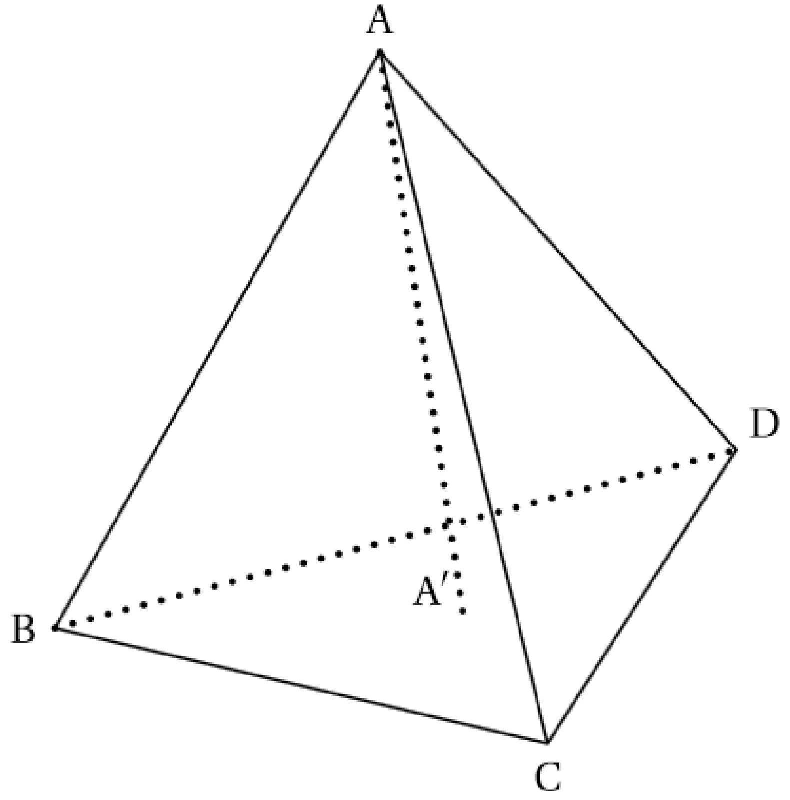
Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A′ est le centre de gravité du triangle BCD.
Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [AA′] est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :
($\mathscr{P}_1$) : *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

a. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).

b. En déduire que la médiane (AA′) est orthogonale à la face BCD.
Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
On souhaite démontrer la propriété suivante :
$(\mathscr{P}_2)$: *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en* G.
En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA′), puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; −1) et R(−2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.
2. Calculer les coordonnées de P′, centre de gravité du triangle OQR.
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x+2y+16z=0$.
4. La propriété $(\mathscr{P}_1)$ de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?