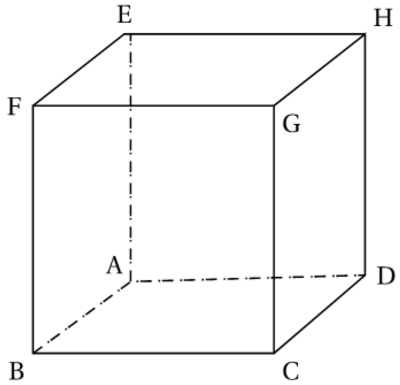
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $L(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. \quad , \; t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

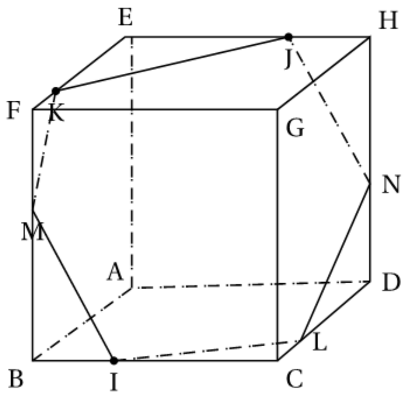
Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. .
   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N