

1. Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A(1; 2; -1), B(-3; -2; 3) \text{ et } C(0; -2; -3).$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$. Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).
 - a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2; 0; -5)$.
 - b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
 - d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).