

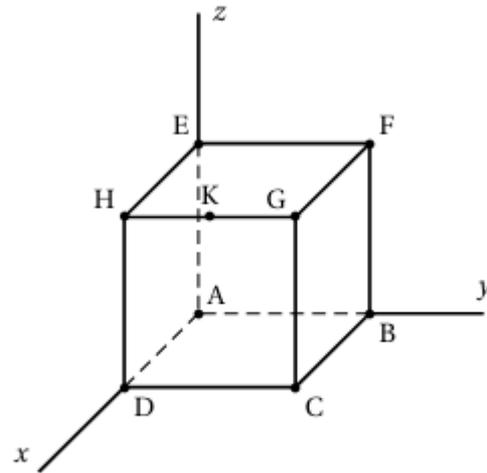
EXERCICE 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.

On note K le milieu du segment [HG].

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE})$.

1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2.
 - a. Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
 - b. Calculer l'aire du triangle FGC.
 - c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.



On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h,$$

où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3.
 - a. On note \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que \vec{n} est normal au plan (CFK).

- b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est :

$$x + 2y + z - 3 = 0.$$

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).

- a. Déterminer les coordonnées du point L.

- b. En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

