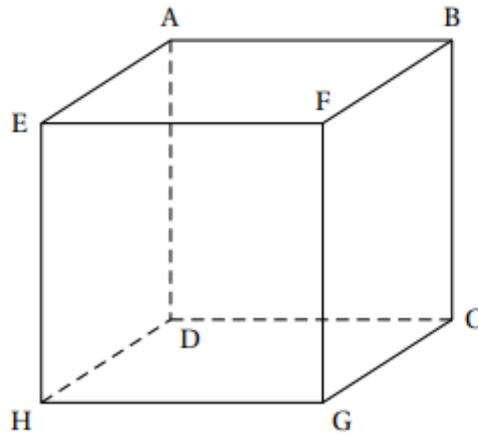


On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que  $AB = 1$ .  
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé  $(D; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ .

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.
3.
  - a. Démontrer que le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan (HFC).
  - b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
5. Démontrer que le point R de coordonnées  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$  est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il?