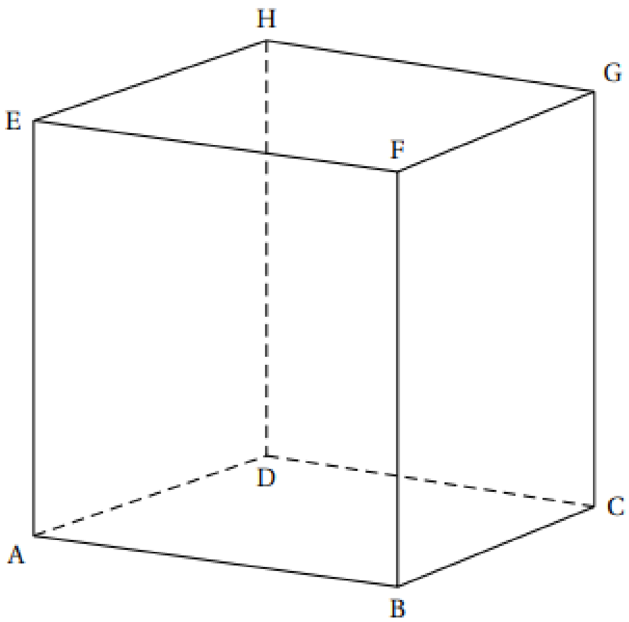
On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right),\qquad N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right),\qquad P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   b. Calculer l'aire du triangle MNP.
5. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z=0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées F$(1;\,0;\,1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL=\dfrac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V=\frac{1}{3}\times \text{aire d'une base}\times\text{hauteur associée à cette base.}$$


H
G
E
F
D
C
A
B