

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(3; 0; 1), \quad B(2; 1; 2) \quad \text{et} \quad C(-2; -5; 1).$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x + y - 2z + 5 = 0.$$

4. On considère le point S(1 ; -2 ; 4).

Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ) , passant par S et orthogonale au plan (ABC).

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Montrer que les coordonnées de H sont (0 ; -1 ; 2).

6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.

7. On considère le cercle \mathcal{C} , inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle \mathcal{D} le disque délimité par le cercle \mathcal{C} .

Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque \mathcal{D} .

8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque \mathcal{D} .