

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le plan  $\mathcal{P}_1$  dont une équation cartésienne est  $2x + y - z + 2 = 0$ ,

- le plan  $\mathcal{P}_2$  passant par le point  $B(1; 1; 2)$  et dont un vecteur normal est  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Donner les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}_1$  normal au plan  $\mathcal{P}_1$ .
  - On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.  
Montrer que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.

- Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$ .

- On note  $\Delta$  la droite dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la droite  $\Delta$  est l'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

On considère le point  $A(1; 1; 1)$  et on admet que le point  $A$  n'appartient ni à  $\mathcal{P}_1$  ni à  $\mathcal{P}_2$ .

On note  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $\Delta$ .

- On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite  $\Delta$  est l'ensemble des points  $M_t$  de coordonnées  $(0; -2 + t; t)$ , où  $t$  désigne un nombre réel quelconque.
  - Montrer que, pour tout réel  $t$ ,  $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$ .
  - En déduire que  $AH = \sqrt{3}$ .
- On note  $\mathcal{D}_1$  la droite orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$  passant par le point  $A$  et  $H_1$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_1$ .
  - Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}_1$ .

- En déduire que le point  $H_1$  a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

5. Soit  $H_2$  le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_2$ .

On admet que  $H_2$  a pour coordonnées  $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$  et que  $H$  a pour coordonnées  $(0; 0; 2)$ .

Sur le schéma ci-contre, les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont représentés, ainsi que les points  $A, H_1, H_2, H$ .

Montrer que  $AH_1HH_2$  est un rectangle.

