

**Exercice 4 7 points****Thèmes : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(2; 4; 0)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

- la droite  $\mathcal{D}'$  dont une représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{u}'$  de la droite  $\mathcal{D}'$ .  
b. Montrer que les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ne sont pas parallèles.

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite  $\Delta$  perpendiculaire aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Cette droite  $\Delta$  coupe chacune des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . On appellera  $M$  le point d'intersection de  $\Delta$  et  $\mathcal{D}$ , et  $M'$  le point d'intersection de  $\Delta$  et  $\mathcal{D}'$ .

On se propose de déterminer la distance  $MM'$  appelée « distance entre les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ».

2. Montrer que le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .

3. On note  $\mathcal{P}$  le plan contenant les droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$ , c'est-à-dire le plan passant par le point  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

- a. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

- b. En déduire qu'une équation du plan  $\mathcal{P}$  est :  $2x - y - 5z = 0$ .

- c. On rappelle que  $M'$  est le point d'intersection des droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}'$ .

Justifier que  $M'$  est également le point d'intersection de  $\mathcal{D}'$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

En déduire que les coordonnées du point  $M'$  sont  $(3; 1; 1)$ .

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .  
b. Justifier que le point  $M$  a pour coordonnées  $(1; 2; 0)$ .  
c. Calculer la distance  $MM'$ .

5. On considère la droite  $d$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+5t \\ z = 1+t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

- a. Montrer que la droite  $d$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .
- b. On note  $\ell$  la distance d'un point  $N$  de la droite  $d$  au plan  $\mathcal{P}$ .

Exprimer le volume du tétraèdre  $ANMM'$  en fonction de  $\ell$ .

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :  $V = \frac{1}{3} \times B \times h$  où  $B$  désigne l'aire d'une base et  $h$  la hauteur relative à cette base.

- c. Justifier que, si  $N_1$  et  $N_2$  sont deux points quelconques de la droite  $d$ , les tétraèdres  $AN_1MM'$  et  $AN_2MM'$  ont le même volume.