

EXERCICE 3 7 points**Thème : Géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(3; -2; 2), \quad B(6; 1; 5), \quad C(6; -2; -1) \quad \text{et} \quad D(0; 4; -1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times h$$

où \mathcal{A} est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
 - b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
 - c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5; 0; 1).
 - a. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$.
 - b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
 - c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.