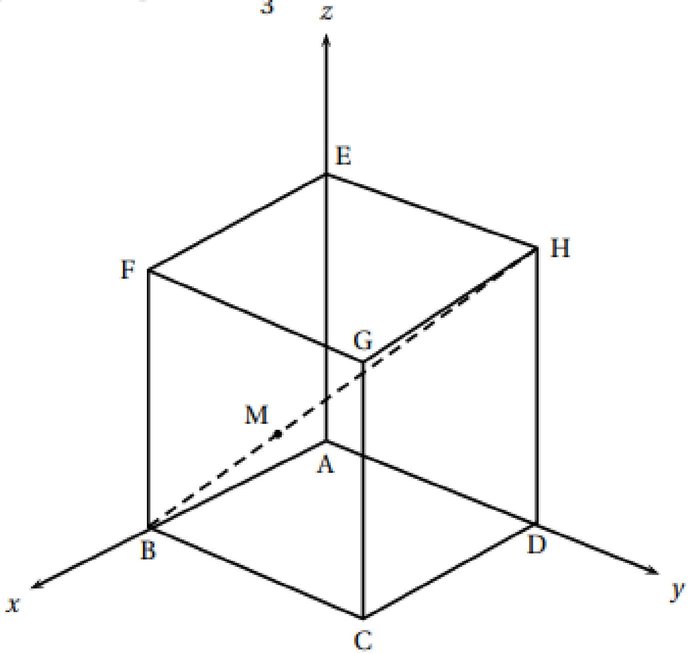
Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD? Justifier la réponse.

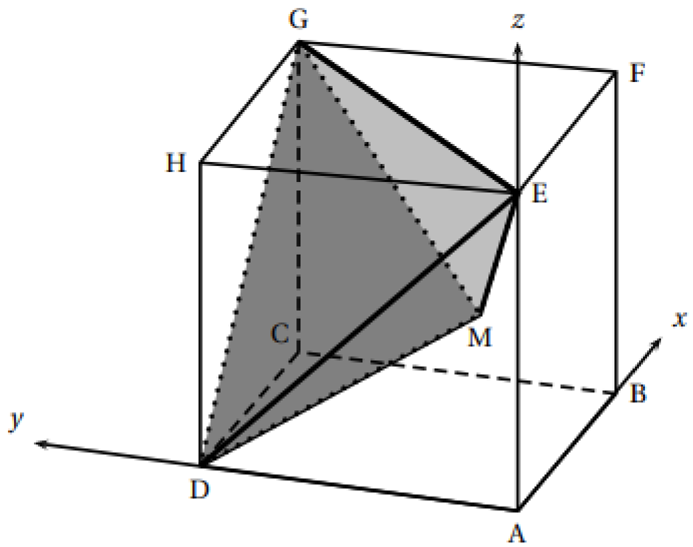
   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

4. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est normal au plan (EGD).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.
   c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3}-t \\ y & = & \frac{1}{3}+t \\ z & = & \frac{1}{3}+t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.
   a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.
   Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.
   b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V=\dfrac{b\times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*