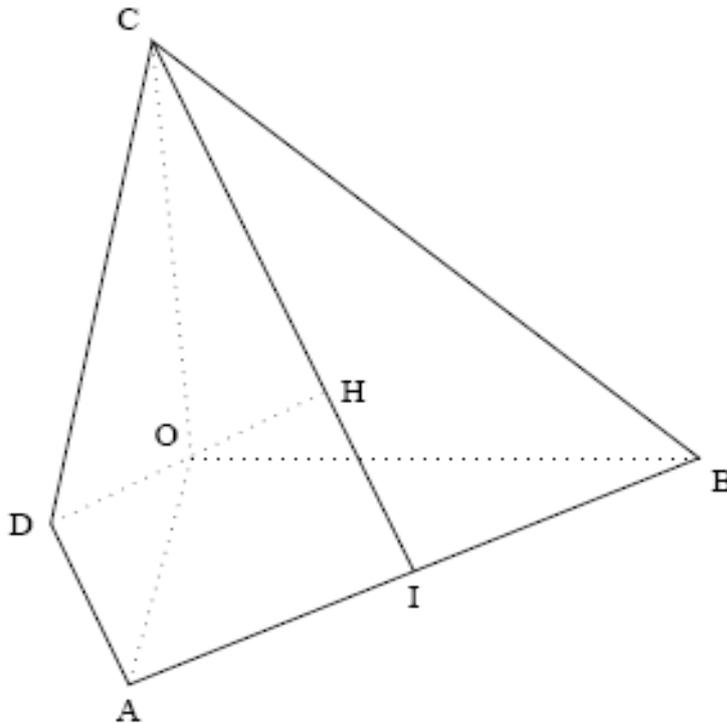


EXERCICE 2 (5 points)

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par :



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
 - a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
 - b. Exprimer OH en fonction de V et de S , en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \frac{1}{a} \vec{OA}, \frac{1}{a} \vec{OB}, \frac{1}{a} \vec{OC})$.

- (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$.
- (b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
- (c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.