

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1) a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

3) Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.