

1. 1. Volume+Barycentre, Pondicherry 2007

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$ et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
b. Vérifier que ce plan est P.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.
c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.
d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.
a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G.
b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
c. Déterminer la distance de G au plan P.
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5$. Déterminer Γ .
Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?