

1. 1. Volume+Barycentre, Pondicherry 2007

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan P d'équation  $2x + y - 2z + 4 = 0$  et les points A de coordonnées  $(3, 2, 6)$ , B de coordonnées  $(1, 2, 4)$  et C de coordonnées  $(4, -2, 5)$ .

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.  
b. Vérifier que ce plan est P.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.  
b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  passant par O et perpendiculaire au plan P.  
c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.  
d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère dans cette question le système de points pondérés  $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ .  
a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G.  
b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).  
c. Déterminer la distance de G au plan P.
4. Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points M de l'espace vérifiant  $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5$ . Déterminer  $\Gamma$ .  
Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et  $\Gamma$  ?