

L'objectif de cet exercice est de déterminer les position relative de différents objets de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 1; 4)$; $B(4; 2; 5)$; $C(3; 0; -2)$ et $J(1; 4; 2)$.

On note : • \mathcal{P} le plan passant par les points A, B et C;

- \mathcal{D} la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Position relative de \mathcal{P} et de \mathcal{D}

- a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P} .
- b. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
- c. Montrer que \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{P} .

On rappelle que, un point I et un nombre réel strictement positif r étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $IM = r$.

On considère le point $I(1; 9; 0)$ et on appelle \mathcal{S} la sphère de centre I et de rayon 6.

2. Position relative de \mathcal{P} et de \mathcal{S}

- a. Montrer que la droite Δ passant par I et orthogonale au plan \mathcal{P} coupe ce plan \mathcal{P} au point $H(3; 1; 2)$.
- b. Calculer la distance IH.
On admet que pour tout point M du plan \mathcal{P} on a $IM \geq IH$.
- c. Le plan \mathcal{P} coupe-t-il la sphère \mathcal{S} ? Justifier la réponse

3. Position relative de \mathcal{D} et de \mathcal{S}

- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .
- b. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à la sphère \mathcal{S} si et seulement si :

$$(x-1)^2 + (y-9)^2 + z^2 = 36.$$

- c. Montrer que la droite \mathcal{D} coupe la sphère en deux points distincts.
On ne cherchera pas à déterminer les coordonnées de ses points.