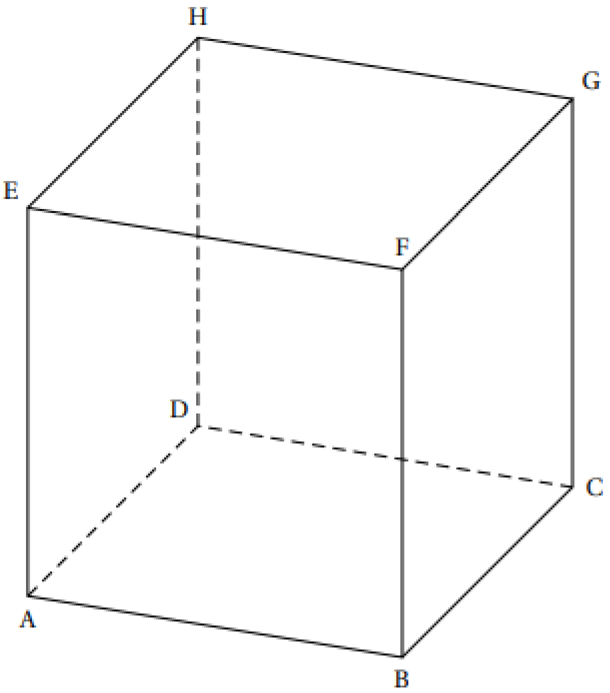
Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\,;\,t\,;\,t)$.

1. Montrer que pour tout réel t, le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

3. Pour tout réel t', on considère le point $M'(1; t'; 1-t')$.
   a. Montrer que pour tous réels t et t', $MM'^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.
   b. Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale? Justifier.
   c. On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
   Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).