

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1.
 - a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 - c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
 - a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
 - b. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - c. Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.