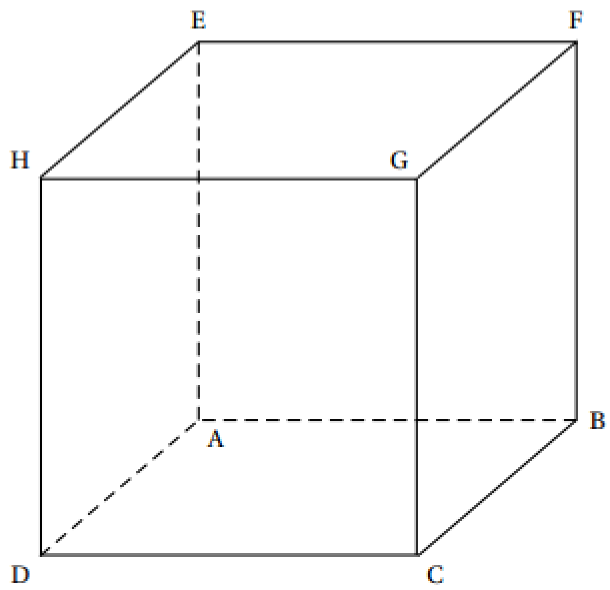
Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & s \\ y & = & 1-s, \\ z & = & 0 \end{array}\right. \text{, où s décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).

Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\ ;\ 1-s\ ;\ 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\ ;\ t\ ;\ t)$ un point de la droite (AG).

a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.

Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?