Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

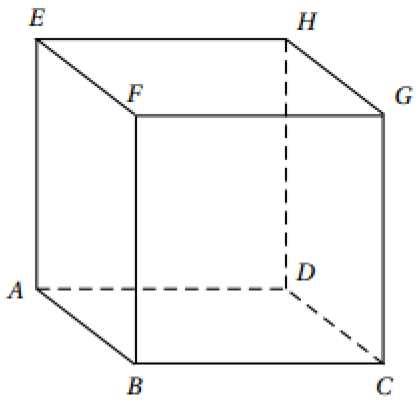
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.