L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0\,;\,2\,;\,-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = -2k \quad (k \in \mathbb{R}). \\ z = 2 \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. **a.** Donner une représentation paramétrique de D_1.
   b. Donner un vecteur directeur de D_2 $\left(\text{on le notera } \overrightarrow{u_2}\right)$.
   c. Le point $A_2(-1\,;\,4\,;\,2)$ appartient-il à D_2 ?
2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.
3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
   Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

   Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.
4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.
   a. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.
   b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.
5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
   Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.