

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A(1; -\sqrt{3}; 0); B(1; \sqrt{3}; 0); C(-2; 0; 0); D(0; 0; 2\sqrt{2}).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.
2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
- b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).
3. a. On note L le milieu du segment [AC].
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.