

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad xf'(x) - 3f(x) = 3 \ln x \quad (E)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Trouver toutes fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel,

$$xP'(x) - 3P(x) = 0$$

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

(a) Calculer $h(1)$.

(b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

(c) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$$

(d) On suppose que f vérifie la propriété (E).

Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$.

3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.