Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E′).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.