

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x .

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose

$$z = \frac{1}{y}.$$

- a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

- b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions?