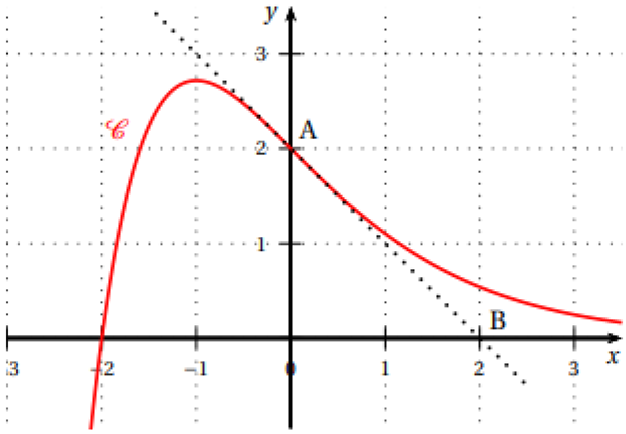
Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0; 2) et B(2; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) : $y' = -y$.

2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   - **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   - **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
     On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
     On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   - **a.** Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
   - **b.** Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?