

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire :

$$p(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right).$$

b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire

$$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 .

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. ? Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b. Déterminer la loi de probabilité de X .

c. Calculer l'espérance mathématique de X .

d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.